CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2003

Filières PC, PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II (algèbre)

Durée : 3 heures
Calculatrices interdites

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à deux, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On note $M_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes, et si A en est un élément, le polynôme caractéristique de A sera $\chi(t)=\det(tI_n-A)$, où I_n désigne la matrice unité de $M_n(\mathbb{C})$.

Pour A de $M_n(\mathbb{C})$ de terme général a_{ij}, on note $\overline{A}$ la matrice de terme général $\overline{a_{ij}}$, et A^* la transposée de cette matrice.

On admettra le résultat suivant : si $b_1,\dots,b_n$ sont des complexes deux à deux distincts, alors le déterminant de la matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ de coefficient $a_{k,m}=b_k^{m-1}$ est non nul.

L'objet du problème est de voir deux points de vue différents de résolution d'une équation algébrique du troisième degré.

Partie 1

On considère l'équation à coefficients réels (e) : $x^3+ax^2+bx+c=0$, et on note $P(X)=X^3+aX^2+bX+c$.

1) a) Trouver un réel α dépendant de a, b, c, tel que le coefficient du terme de degré deux du polynôme $Q(X)=P(X+\alpha)$ soit nul.

b) On note alors $Q(X)=X^3+pX+q$. Exprimer p et q en fonction de a, b, c.

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur p et q pour que le polynôme Q possède dans $\mathbb{C}$ une racine au moins double. Résoudre l'équation (e') : $Q(x)=0$ dans ce cas.

3) On suppose que la condition trouvée au 2) n'est pas vérifiée et on veut résoudre l'équation (e').

a) Montrer que tout complexe x peut se mettre sous la forme $x=u+v$ où u et v sont des complexes vérifiant la condition $3uv+p=0$.

b) Montrer que si x est solution de (e') u^3 et v^3 sont les racines z_1 et z_2 d'une équation du second degré que l'on formera.

c) En déduire les solutions de (e') en distinguant les cas $4p^3+27q^2>0$ et $4p^3+27q^2<0$.

d) Dans quel cas les racines sont elles toutes réelles ? Comparer avec l'étude des variations de Q.

4) Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3-3x^2-3x-1=0$.

Tournez la page S.V.P.

Partie 2

On considère des complexes $a_0,...,a_{n-1}$ et on note u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base **B** est $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_1 & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & a_{n-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$. On note w l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base **B** est $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note enfin $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1} X^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

1) a) Pour k compris entre 1 et n, expliciter $w(e_k)$.

b) Pour $1 \le p \le n, 1 \le k \le n$ calculer $w^p(e_k)$; (faire une récurrence surp). En déduire que $w^n = Id_E$.

c) Etablir que w est diagonalisable, donner son spectre et ses sousespaces propres et prouver qu'il existe U inversible telle que $U^* = U^{-1}$ vérifiant : $U^* W U$ est diagonale.

2) On note $\mathbb{C}[W]$ l'ensemble des $R(W)$ lorsque R parcourt $\mathbb{C}[X]$.

a) Montrer que si une matrice M est élément de $\mathbb{C}[W]$ **alors** $U^* M U$ est diagonale.

b) Etablir que tout élément de $\mathbb{C}[W]$ commute avec W.

c) Soit M matrice qui commute avec W; on note m l'endomorphisme représenté **par** M **dans** la base B. Monîrer que tout sous-espace propre de w est stable par m. En déduire que $U^* M U$ est diagonale, puis que M est élément de $\mathbb{C}[W]$. (On montrera que $U^* M U$ est un polynôme en $U^* W U$). Conclusion ?

d) Diagonaliser A.

3) Application

a) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Déduire de ce qui précède les racines de $X^4 - 4X^3 - 20X^2 - 4X - 21$.

c) Mêmes questions **pour** $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{4} & 1 & \sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{4} & 1 \end{pmatrix}$ et $X^3 - 3X^2 - 3X - 1$.

4) On revient au cas général et on note Q le polynôme caractéristique de A. En utilisant **2)d)** prouver que les racines de Q sont réelles si et seulement si $A^* = A$.

Partie 3

1) On considère le polynôme à coefficients réels $Q(X) = X^2 + \alpha X + \beta$. Ici $n=2$ et donc $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Montrer que Q est le polynôme caractéristique de A si et seulement si $\begin{cases} a = -2a \\ a^2 - b^2 = \beta \end{cases}$.

b) Dans ce cas, exprimer A comme un polynôme en W dont les coefficients seront exprimés en fonction de a et β. En déduire les racines de Q.

2) **Exemple** : utiliser cette méthode pour trouver les racines de $Q(X) = X^2 - 3X + 2$.

3) On considère dans cette question le polynôme à coefficients réels $Q(X) = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$.

Ici $n=3$ et $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et χ le polynôme caractéristique de A. Calculer $\chi(a+\gamma)$. Que remarque-t-on ?

b) On suppose que $a+\gamma$, c'est-à-dire $Q(X) = X^3 + \beta X + \gamma$ et on cherche A avec $a=0$; justifier. Montrer que $Q = \chi$ si et seulement si $\begin{cases} b^3 + c^3 = -\gamma \\ 3bc = -\beta \end{cases}$. Résoudre ce système. (On gardera pour la suite la seule solution de ce système où b n'a formellement ni j ni j^2 en facteur).

c) Toujours avec $a=0$ et $a=0$, exprimer alors A comme un polynôme en W. En déduire les racines de Q.

4) **Exemple** : Trouver les racines de $Q(X) = X^3 - 2X - 12$.

5) **a)** On suppose qu'on est toujours dans le cadre du 3)b,c. Donner une condition nécessaire et suffisante simple sur b et c pour que les racines de Q soient réelles en utilisant le II4).

b) A l'aide de 3)b, prouver que les racines de Q sont réelles si et seulement si $27\gamma^2 + 4\beta^3 \leq 0$.

c) On suppose que $c = \bar{b}$. Calculer $Q(1)$, $Q(j)$, $Q(j^2)$ et les points d'abscisses correspondantes sur le cercle de centre 0 et de rayon $2|b|$. Que constate-t-on?

_____ Fin de l'énoncé _____